

# EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

## WZORY

### SPIS TREŚCI

1. Wartość bezwzględna liczby .....	1
2. Potęgi i pierwiastki .....	1
3. Logarytmy .....	2
4. Silnia. Współczynnik dwumianowy .....	2
5. Wzór dwumianowy Newtona .....	3
6. Wzory skróconego mnożenia .....	3
7. Ciągi .....	3
8. Funkcja kwadratowa .....	4
9. Geometria analityczna .....	5
10. Planimetria .....	7
11. Stereometria .....	12
12. Trygonometria .....	14
13. Kombinatoryka .....	16
14. Rachunek prawdopodobieństwa .....	16
15. Parametry danych statystycznych .....	16
16. Przybliżone wartości pierwiastków oraz przybliżona wartość liczby $\pi$ .....	17
17. Tablica wartości funkcji trygonometrycznych .....	18

### 1. WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA LICZBY

Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej  $x$  definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Liczba  $|x|$  jest to odległość na osi liczbowej punktu  $x$  od punktu 0. W szczególności:

$$|x| \geq 0 \qquad | -x | = | x |$$

Dla dowolnych liczb  $x, y$  mamy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \qquad |x - y| \leq |x| + |y| \qquad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

Ponadto, jeśli  $y \neq 0$ , to  $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

Dla dowolnych liczb  $a$  oraz  $r \geq 0$ , mamy warunki równoważne:

$$\begin{aligned} |x - a| \leq r &\Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r \\ |x - a| \geq r &\Leftrightarrow x \leq a - r \text{ lub } x \geq a + r \end{aligned}$$

### 2. POTĘGI I PIERWIASTKI

Niech  $n$  będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby  $a$  definiujemy jej  $n$ -tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

Pierwiastkiem arytmetycznym  $\sqrt[n]{a}$  stopnia  $n$  z liczby  $a \geq 0$  nazywamy liczbę  $b \geq 0$  taką, że  $b^n = a$ .

W szczególności, dla dowolnej liczby  $a$  zachodzi równość:  $\sqrt{a^2} = |a|$ .

Jeżeli  $a < 0$  oraz liczba  $n$  jest nieparzysta, to  $\sqrt[n]{a}$  oznacza liczbę  $b < 0$  taką, że  $b^n = a$ .  
Pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

— \* —

Niech  $m, n$  będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

– dla  $a \neq 0$ :  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$  oraz  $a^0 = 1$

– dla  $a \geq 0$ :  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

– dla  $a > 0$ :  $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Niech  $r, s$  będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli  $a > 0$  i  $b > 0$ , to zachodzą równości:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad (a^r)^s = a^{r \cdot s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Jeżeli wykładniki  $r, s$  są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb  $a \neq 0, b \neq 0$ .

### 3. LOGARYTMY

Niech  $a > 0$  i  $a \neq 1$ . Logarytmem  $\log_a c$  liczby  $c > 0$  przy podstawie  $a$  nazywamy wykładnik  $b$  potęgi, do której należy podnieść podstawę  $a$ , aby otrzymać liczbę  $c$ :

$$b = \log_a c \Leftrightarrow a^b = c$$

Równoważnie:

$$a^{\log_a c} = c$$

Dla dowolnych liczb  $x > 0, y > 0$  oraz  $r$  zachodzą wzory:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a x^r = r \cdot \log_a x \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Wzór na zamianę podstawy logarytmu:

jeżeli  $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$  oraz  $c > 0$ , to

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

$\log x$  oznacza  $\log_{10} x$ .

### 4. SILNIA. WSPÓLCZYNNIK DWUMIANOWY

Silnią liczby całkowitej dodatniej  $n$  nazywamy iloczyn kolejnych liczb całkowitych:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

Ponadto przyjmujemy umowę, że  $0! = 1$ .

Dla dowolnej liczby całkowitej  $n \geq 0$  zachodzi związek:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

— \* —

Dla liczb całkowitych  $n, k$  spełniających warunki  $0 \leq k \leq n$  definiujemy współczynnik dwumianowy (symbol Newtona):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Zachodzą równości:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1$$

### 5. WZÓR DWUMIANOWY NEWTONA

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$  oraz dla dowolnych liczb  $a, b$  mamy:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

### 6. WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

Z dwumianu Newtona dla  $n = 2$  oraz  $n = 3$  otrzymujemy dla dowolnych liczb  $a, b$ :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

— \* —

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$  oraz dowolnych liczb  $a, b$  zachodzi wzór:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-k}b^{k-1} + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$(a^n - 1) = (a-1)(1 + a + \dots + a^{n-1})$$

W szczególności:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \quad a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \quad a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \quad a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$$

### 7. CIĄGI

- Ciąg arytmetyczny

Wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego o danym pierwszym wyrazie  $a_1$  i różnicy  $r$ :

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Wzór na sumę  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  początkowych  $n$  wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego zachodzi związek:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla } n \geq 2$$

- Ciąg geometryczny

Wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu geometrycznego o danym pierwszym wyrazie  $a_1$  i ilorazie  $q$ :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2$$

Wzór na sumę  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  początkowych  $n$  wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} & \text{dla } q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & \text{dla } q = 1 \end{cases}$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu geometrycznego zachodzi związek:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \quad \text{dla } n \geq 2$$

- Procent składany

Jeżeli kapitał początkowy  $K$  złożymy na  $n$  lat w banku, w którym oprocentowanie lokat wynosi  $p\%$  w skali rocznej, to kapitał końcowy  $K_n$  wyraża się wzorem:

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

## 8. FUNKCJA KWADRATOWA

Postać ogólna funkcji kwadratowej:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ ,  $x \in R$ .

Wzór każdej funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci kanonicznej:

$$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \quad \text{gdzie } \Delta = b^2 - 4ac$$

pomocnej przy sporządzaniu wykresu.

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie o współrzędnych  $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ . Ramiona paraboli skierowane są do góry, gdy  $a > 0$ , do dołu, gdy  $a < 0$ .

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , czyli liczba rozwiązań równania  $ax^2 + bx + c = 0$  zależy od wyróżnika  $\Delta = b^2 - 4ac$ :

- jeżeli  $\Delta < 0$ , to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych),
- jeżeli  $\Delta = 0$ , to funkcja kwadratowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe (równanie kwadratowe ma jedno rozwiązanie rzeczywiste):

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- jeżeli  $\Delta > 0$ , to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe (równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania rzeczywiste):

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Jeśli  $\Delta \geq 0$ , to wzór funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Wzory Viéte'a:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

## 9. GEOMETRIA ANALITYCZNA

### • Odcinek

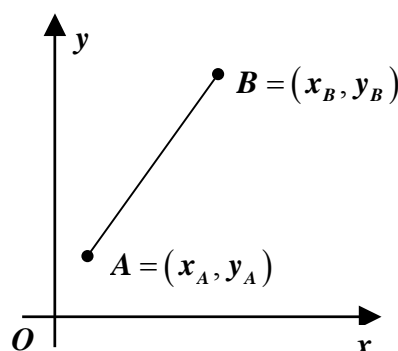
Długość odcinka o końcach w punktach

$A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$  dana jest wzorem:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Współrzędne środka odcinka  $AB$ :

$$\left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$



### • Wektory

Współrzędne wektora  $\overrightarrow{AB}$ , który przesuwa punkt  $A$  na punkt  $B$ :

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

Jeżeli  $\vec{u} = [u_1, u_2]$ ,  $\vec{v} = [v_1, v_2]$  są wektorami, zaś  $a$  jest liczbą, to

$$\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2] \quad a \cdot \vec{u} = [a \cdot u_1, a \cdot u_2]$$

### • Prosta

Równanie ogólne prostej:

$$Ax + By + C = 0,$$

gdzie  $A^2 + B^2 \neq 0$  (tj. współczynniki  $A, B$  nie są równocześnie równe 0).

Jeżeli  $A = 0$ , prosta jest równoległa do osi  $Ox$ ; jeżeli  $B = 0$ , prosta jest równoległa do osi  $Oy$ ; jeżeli  $C = 0$ , to prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych.

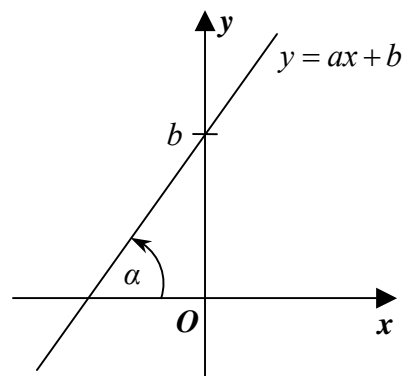
Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi  $Oy$ , to ma ona równanie kierunkowe:

$$y = ax + b$$

Liczba  $a$  to współczynnik kierunkowy prostej:

$$a = \operatorname{tg} \alpha$$

Współczynnik  $b$  wyznacza na osi  $Oy$  punkt, w którym dana prosta ją przecina.



Równanie kierunkowe prostej o danym współczynniku kierunkowym  $a$  i przechodzącej przez punkt  $P = (x_0, y_0)$ :

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

Równanie prostej, przechodzącej przez dwa dane punkty  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$ :

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

- Prosta i punkt

Odległość punktu  $P = (x_0, y_0)$  od prostej o równaniu  $Ax + By + C = 0$  dana jest wzorem:

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- Para prostych

Dwie proste, o równaniach kierunkowych

$$y = a_1x + b_1 \quad y = a_2x + b_2$$

spełniają jeden z następujących warunków:

- są równoległe, gdy  $a_1 = a_2$ ,
- są prostopadłe, gdy  $a_1a_2 = -1$ ,
- tworzą kąt  $\varphi$  taki, że:  $0^\circ < \varphi < 90^\circ$  i  $\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1a_2} \right|$

Jeżeli proste dane są równaniami w postaci ogólnej:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

to odpowiednio:

- są równoległe, gdy  $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ ,
- są prostopadłe, gdy  $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ ,
- tworzą kąt  $\varphi$  taki, że:  $0^\circ < \varphi < 90^\circ$  i  $\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} \right|$

- Trójkąt

Pole trójkąta  $ABC$  o wierzchołkach  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$ ,  $C = (x_C, y_C)$ , dane jest wzorem:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$$

Środek ciężkości trójkąta  $ABC$ , czyli punkt przecięcia jego środkowych, ma współrzędne:

$$\left( \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$

- Przekształcenia geometryczne

- przesunięcie o wektor  $\vec{u} = [a, b]$  przekształca punkt  $(x, y)$  na punkt  $(x + a, y + b)$ ;
- symetria względem osi  $Ox$  przekształca punkt  $(x, y)$  na punkt  $(x, -y)$ ;
- symetria względem osi  $Oy$  przekształca punkt  $(x, y)$  na punkt  $(-x, y)$ ;
- symetria względem punktu  $(a, b)$  przekształca punkt  $(x, y)$  na punkt  $(2a - x, 2b - y)$ ;
- jednokładność o środku w punkcie  $(0, 0)$  i skali  $s \neq 0$  przekształca punkt  $(x, y)$  na punkt  $(sx, sy)$ .

- Równanie okręgu

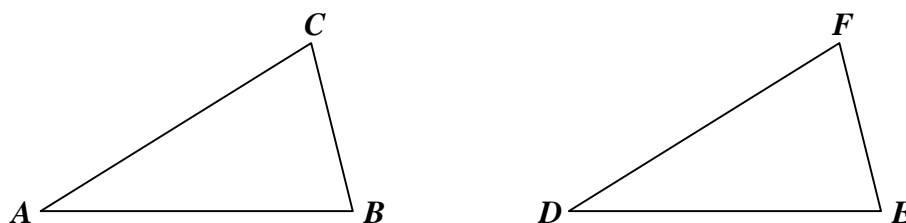
Równanie okręgu o środku w punkcie  $(a, b)$  i promieniu  $r$ :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

lub  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  gdy  $r^2 = a^2 + b^2 - c > 0$

## 10. PLANIMETRIA

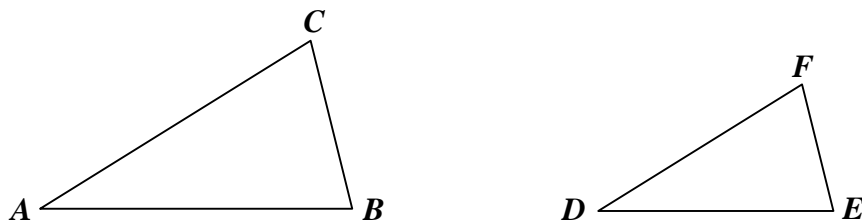
- Cechy przystawania trójkątów



To, że dwa trójkąty  $ABC$  i  $DEF$  są przystające ( $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ ), możemy wywnioskować z każdej z następujących **cech przystawania trójkątów**:

- cecha przystawania „bok – bok – bok”:  
odpowiadające sobie boki obu trójkątów mają te same długości:  $|AB| = |DE|$ ,  
 $|AC| = |DF|$ ,  $|BC| = |EF|$ ;
- cecha przystawania „bok – kąt – bok”:  
dwa boki jednego trójkąta są równe odpowiadającym im bokom drugiego trójkąta oraz kąt zawarty między tymi bokami jednego trójkąta ma taką samą miarę jak odpowiadający mu kąt drugiego trójkąta, np.  $|AB| = |DE|$ ,  $|AC| = |DF|$ ,  
 $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$ ;
- cecha przystawania „kąt – bok – kąt”:  
jeden bok jednego trójkąta ma tę samą długość, co odpowiadający mu bok drugiego trójkąta oraz miary odpowiadających sobie kątów obu trójkątów, przyległych do boku, są równe, np.  $|AB| = |DE|$ ,  $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$ ,  $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$ .

- Cechy podobieństwa trójkątów



To, że dwa trójkąty  $ABC$  i  $DEF$  są podobne ( $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ), możemy wywnioskować z każdej z następujących **cech podobieństwa trójkątów**:

- cecha podobieństwa „bok – bok – bok”:

odpowiadające sobie boki obu trójkątów są proporcjonalne:  $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|}$ ;

- cecha podobieństwa „ką – ką – ką”:

odpowiadające sobie kąty są równe:  $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$ ,  $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$ ,  
 $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DFE|$ ;

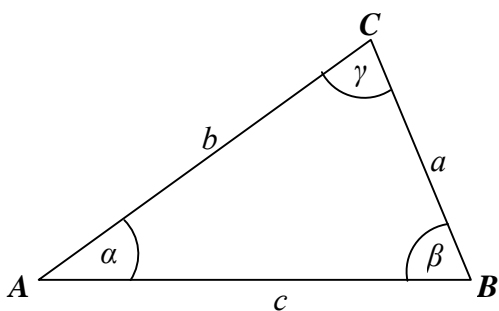
Uwaga. Wystarczy, by dwa kąty jednego trójkąta były równe dwóm kątom drugiego trójkąta.

- cecha podobieństwa „bok – ką – bok”:

dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiadających im boków drugiego trójkąta oraz miary kątów zawartych między tymi bokami w obu trójkątach są równe,

np.  $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|}$ ,  $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$ .

- Oznaczenia



$a, b, c$  – długości boków, leżących odpowiednio naprzeciwko wierzchołków  $A, B, C$ ;

$2p = a + b + c$  – obwód trójkąta;

$\alpha, \beta, \gamma$  – miary kątów przy wierzchołkach  $A, B, C$ ;

$h_a, h_b, h_c$  – wysokości, opuszczone z wierzchołków  $A, B, C$ ;

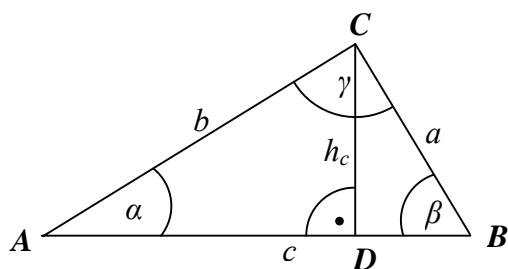
$R, r$  – promienie okręgów opisanego i wpisanego.

- Twierdzenie Pitagorasa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

W trójkącie  $ABC$  kąt  $\gamma$  jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy  $a^2 + b^2 = c^2$ .



- Związki miarowe w trójkącie prostokątnym



Założmy, że kąt  $\gamma$  jest prosty. Wówczas:

$$h_c^2 = |AD| \cdot |DB|$$

$$h_c = \frac{ab}{c}$$

$$a = c \cdot \sin \alpha = c \cdot \cos \beta$$

$$a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha = b \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$$

$$R = \frac{1}{2}c$$

- Twierdzenie sinusów

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

- Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

- Wzory na pole trójkąta

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma, \text{ gdy } \gamma \text{ jest kątem rozwartym to } P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin(180^\circ - \gamma)$$

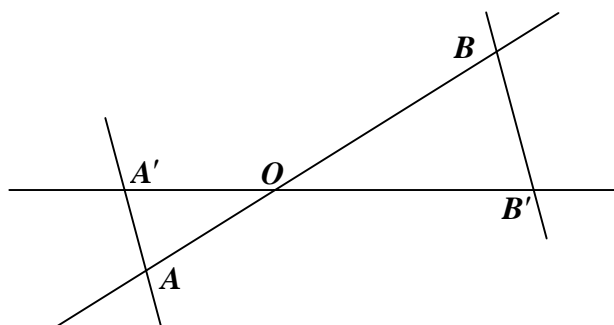
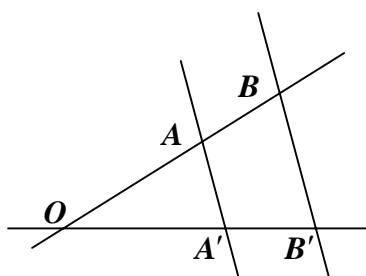
$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} = rp = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

- Twierdzenie Talesa

Jeżeli proste równoległe  $AA'$  i  $BB'$  przecinają dwie proste przecinające się w punkcie  $O$ , to

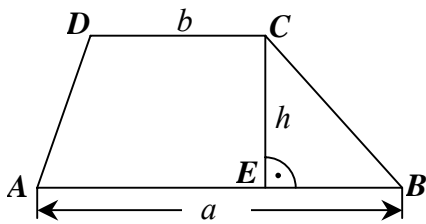
$$\frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{|OB|}{|OB'|}$$



- Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

Jeżeli proste  $AA'$  i  $BB'$  przecinają dwie proste przecinające się w punkcie  $O$  oraz  $\frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{|OB|}{|OB'|}$ , to proste  $AA'$  i  $BB'$  są równoległe.

- Czworokąty

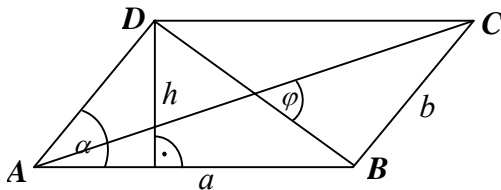


**Trapez**

Czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.

Wzór na pole trapezu:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

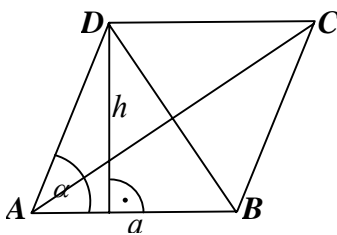


**Równoległobok**

Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

Wzory na pole równoległoboku:

$$P = ah = a \cdot b \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin \varphi$$

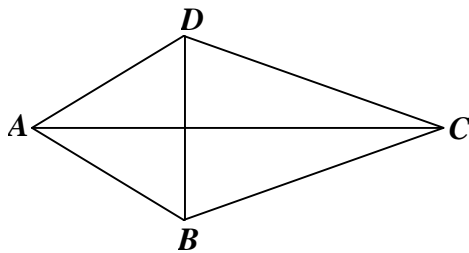


**Romb**

Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych jednakowej długości.

Wzory na pole rombu:

$$P = ah = a^2 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



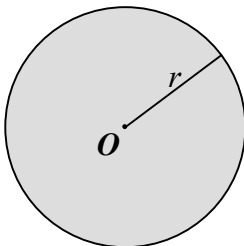
**Deltoid**

Czworokąt, który ma oś symetrii, zawierającą jedną z przekątnych.

Wzór na pole deltoиду:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$

- Koło



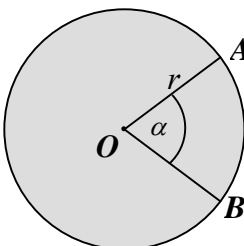
Wzór na pole koła o promieniu  $r$ :

$$P = \pi r^2$$

Obwód koła o promieniu  $r$ :

$$Ob = 2\pi r$$

- Wycinek koła



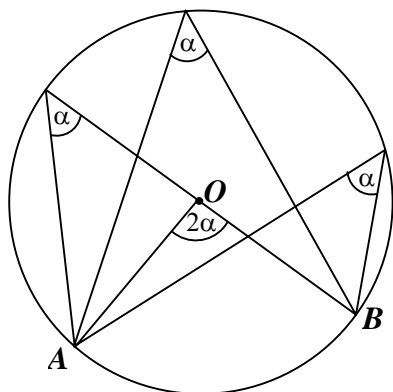
Wzór na pole wycinka koła o promieniu  $r$  i kącie środkowym  $\alpha^\circ$ :

$$P = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$$

Długość łuku wycinka koła o promieniu  $r$  i kącie środkowym  $\alpha^\circ$ :

$$l = 2\pi r \cdot \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$$

- Kąty w okręgu

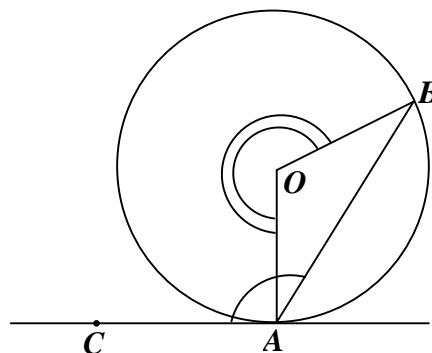
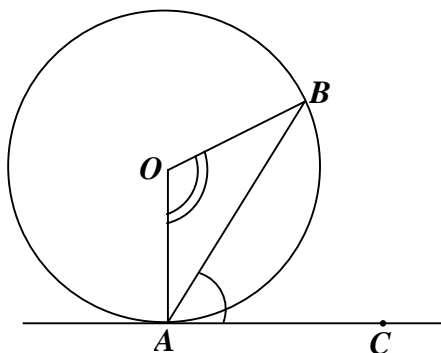


Miara kąta wpisanego w okrąg jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.

Miary kątów wpisanych w okrąg, opartych na tym samym łuku, są równe.

- Twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą

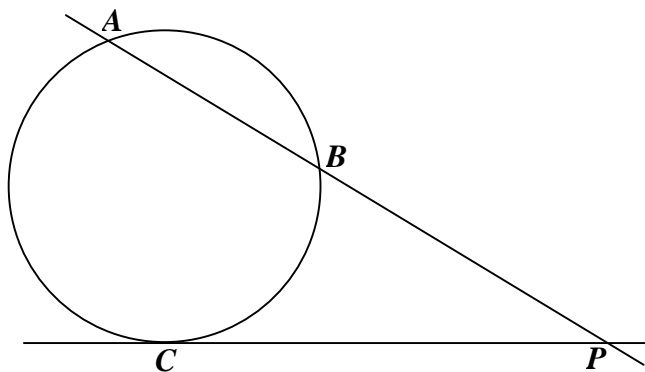
Dany jest okrąg o środku w punkcie  $O$  i jego cięciwa  $AB$ . Prosta  $AC$  jest styczna do tego okręgu w punkcie  $A$ . Wtedy  $|\sphericalangle AOB| = 2 \cdot |\sphericalangle CAB|$ , przy czym wybieramy ten z kątów środkowych  $AOB$ , który jest oparty na łuku znajdującym się wewnątrz kąta  $CAB$ .



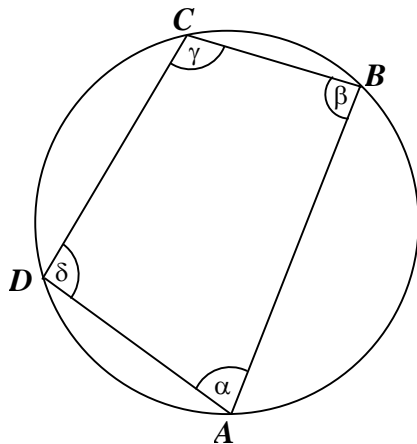
- Twierdzenie o odcinkach siecznej i stycznej

Dane są: prosta przecinająca okrąg w punktach  $A$  i  $B$  oraz prosta styczna do tego okręgu w punkcie  $C$ . Jeżeli proste te przecinają się w punkcie  $P$ , to

$$|PA| \cdot |PB| = |PC|^2$$



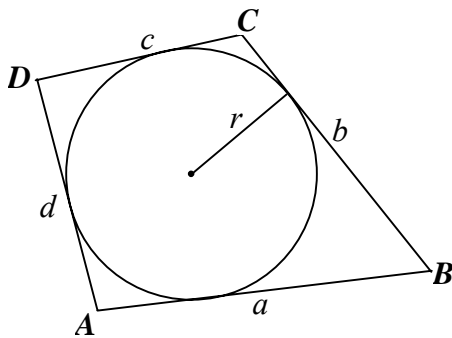
- Okrąg opisany na czworokącie



Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe  $180^\circ$ :

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$

- Okrąg wpisany w czworokąt

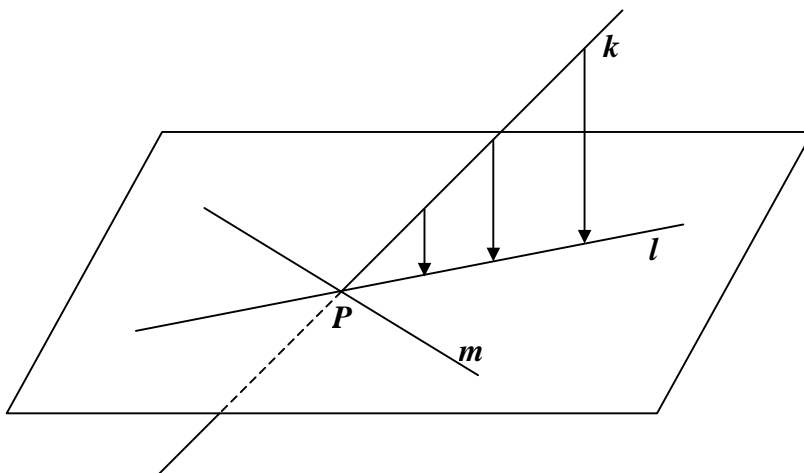


W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe:

$$a + c = b + d$$

## 11. STEREOMETRIA

- Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych



Prosta  $k$  przebija płaszczyznę w punkcie  $P$ . Prosta  $l$  jest rzutem prostokątnym prostej  $k$  na tę płaszczyznę. Prosta  $m$  leży na tej płaszczyźnie i przechodzi przez punkt  $P$ . Wówczas prosta  $m$  jest prostopadła do prostej  $k$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do prostej  $l$ .

- Oznaczenia

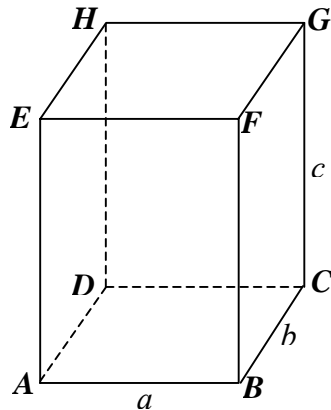
$P$  – pole powierzchni całkowitej

$P_p$  – pole powierzchni podstawy

$P_b$  – pole powierzchni bocznej

$V$  – objętość

- Prostopadłościan

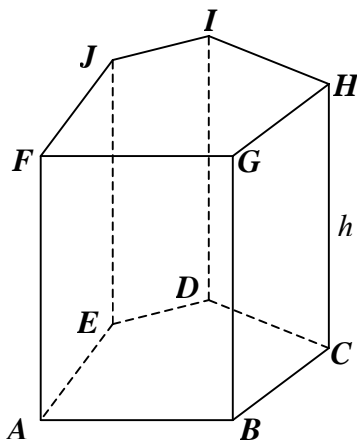


$$P = 2(ab + bc + ac)$$

$$V = abc$$

gdzie  $a, b, c$  są długościami krawędzi prostopadłościanu.

- Graniastosłup prosty

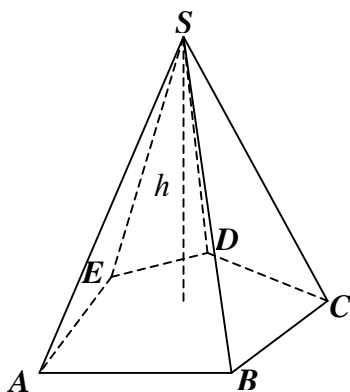


$$P_b = 2p \cdot h$$

$$V = P_p \cdot h$$

gdzie  $2p$  jest obwodem podstawy graniastosłupa.

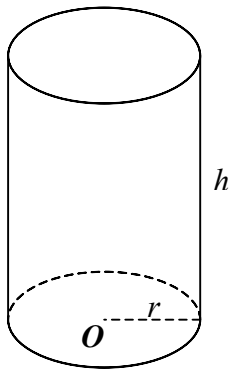
- Ostrosłup



$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$

gdzie  $h$  jest wysokością ostrosłupa.

- Walec



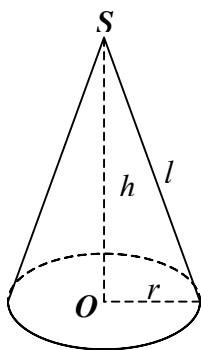
$$P_b = 2\pi r h$$

$$P = 2\pi r (r + h)$$

$$V = \pi r^2 h$$

gdzie  $r$  jest promieniem podstawy,  
 $h$  wysokością walca.

- Stożek



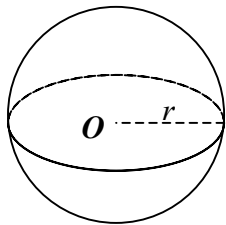
$$P_b = \pi r l$$

$$P = \pi r (r + l)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

gdzie  $r$  jest promieniem podstawy,  
 $h$  wysokością,  $l$  długością tworzącej stożka.

- Kula



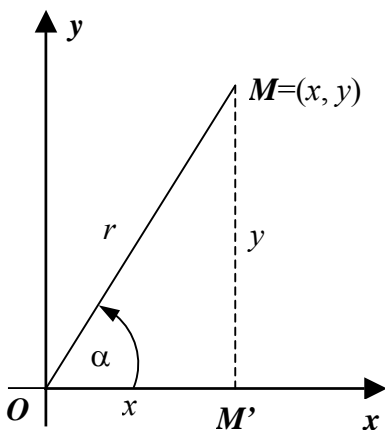
$$P = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

gdzie  $r$  jest promieniem kuli.

## 12 TRYGNOMETRIA

- Definicje funkcji trygonometrycznych

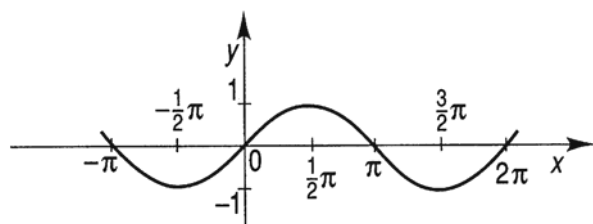


$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}$$

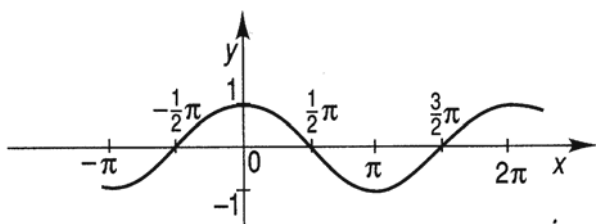
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\text{gdzie } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

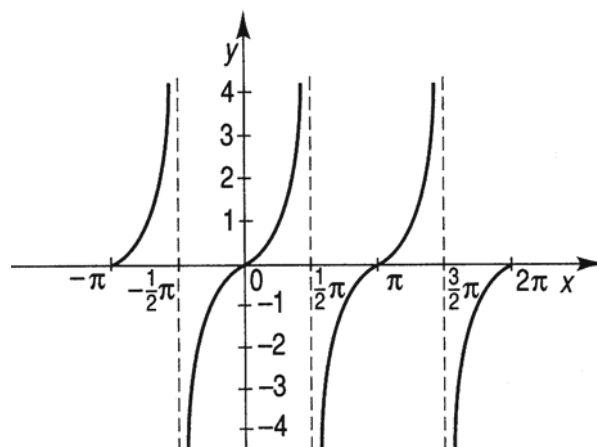
- Wykresy funkcji trygonometrycznych



$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \text{tg } x$

- Związki między funkcjami tego samego kąta

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{dla} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k - \text{całkowite}$$

- Niektóre wartości funkcji trygonometrycznych

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\text{tg } \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

- Funkcje sumy i różnicy kątów

Dla dowolnych kątów  $\alpha$ ,  $\beta$  zachodzą równości:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Ponadto mamy równości:

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta} \quad \text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta}{1 + \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta}$$

które zachodzą zawsze, gdy są określone i mianownik prawej strony nie jest zerem.

- Funkcje podwojonego kąta

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

### 13. KOMBINATORYKA

- Permutacje

Liczba sposobów, w jaki  $n \geq 1$  elementów można ustawić w ciąg, jest równa  $n!$ .

- Wariacje bez powtórzeń

Liczba sposobów, w jaki z  $n$  elementów można utworzyć ciąg, składający się z  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) różnych wyrazów, jest równa

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Wariacje z powtórzeniami

Liczba sposobów, w jaki z  $n$  elementów można utworzyć ciąg, składający się z  $k$  niekoniecznie różnych wyrazów, jest równa  $n^k$ .

- Kombinacje

Liczba sposobów, w jaki spośród  $n$  elementów można wybrać  $k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) elementów, jest równa  $\binom{n}{k}$

### 14. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

- Własności prawdopodobieństwa

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{dla każdego zdarzenia } A \subset \Omega$$

$$P(\Omega) = 1 \quad \Omega - \text{zdarzenie pewne}$$

$$P(\emptyset) = 0 \quad \emptyset - \text{zdarzenie niemożliwe (pusty podzbiór } \Omega)$$

$$P(A) \leq P(B) \quad \text{gdy } A \subset B \subset \Omega$$

$$P(A') = 1 - P(A), \text{ gdzie } A' \text{ oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia } A.$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \text{ dla dowolnych zdarzeń } A, B \subset \Omega,$$

zatem  $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ , dla dowolnych zdarzeń  $A, B \subset \Omega$ .

- Twierdzenie: Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Niech  $\Omega$  będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych. Jeżeli zajście każdego zdarzenia elementarnego jest jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia  $A \subset \Omega$  jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdzie  $|A|$  oznacza liczbę elementów zbioru  $A$ , zaś  $|\Omega|$  – liczbę elementów zbioru  $\Omega$ .

### 15. PARAMETRY DANYCH STATYSTYCZNYCH

- Średnia arytmetyczna

Średnia arytmetyczna  $n$  liczb  $a_1, a_2, \dots, a_n$  jest równa:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$



- Średnia ważona

Średnia ważona  $n$  liczb  $a_1, a_2, \dots, a_n$  którym przypisano odpowiednio dodatnie wagi  $w_1, w_2, \dots, w_n$  jest równa:

$$\frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \dots + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

- Średnia geometryczna

Średnia geometryczna  $n$  nieujemnych liczb  $a_1, a_2, \dots, a_n$  jest równa:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

- Mediana

Medianą uporządkowanego w kolejności niemalejącej ciągu  $n$  danych liczbowych  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n$  jest:

– dla  $n$  nieparzystych:  $a_{\frac{n+1}{2}}$  (środkowy wyraz ciągu),

– dla  $n$  parzystych:  $\frac{1}{2} \left( a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1} \right)$  (średnia arytmetyczna środkowych wyrazów ciągu).

- Wariancja i odchylenie standardowe

Wariancją  $n$  danych liczbowych  $a_1, a_2, \dots, a_n$  o średniej arytmetycznej  $\bar{a}$  jest liczba:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \dots + (a_n - \bar{a})^2}{n} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} - (\bar{a})^2$$

Odchylenie standardowe  $\sigma$  jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji.

## 16. PRZYBLIŻONE WARTOŚCI PIERWIASTKÓW ORAZ PRZYBLIŻONA WARTOŚĆ LICZBY $\pi$

$\sqrt{2} \approx 1,4142$	$\sqrt[3]{2} \approx 1,2599$
$\sqrt{3} \approx 1,7321$	$\sqrt[3]{3} \approx 1,4422$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt[3]{4} \approx 1,5874$
$\sqrt{5} \approx 2,2361$	$\sqrt[3]{5} \approx 1,7100$
$\sqrt{6} \approx 2,4495$	$\sqrt[3]{6} \approx 1,8171$
$\sqrt{7} \approx 2,6458$	$\sqrt[3]{7} \approx 1,9129$
$\sqrt{8} \approx 2,8284$	$\sqrt[3]{8} = 2$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt[3]{9} \approx 2,0801$
$\sqrt{10} \approx 3,1623$	$\sqrt[3]{10} \approx 2,1544$

$$\pi \approx 3,1416$$

### 17. TABLICA WARTOŚCI FUNKCJI TRYGNOMETRYCZNYCH

$\alpha$ [°]	$\frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta$ [°]
0	<b>0,0000</b>	<b>0,0000</b>	<b>90</b>
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
<b>10</b>	<b>0,1736</b>	<b>0,1763</b>	<b>80</b>
11	0,1908	0,1944	79
12	0,2079	0,2126	78
13	0,2250	0,2309	77
14	0,2419	0,2493	76
15	0,2588	0,2679	75
16	0,2756	0,2867	74
17	0,2924	0,3057	73
18	0,3090	0,3249	72
19	0,3256	0,3443	71
<b>20</b>	<b>0,3420</b>	<b>0,3640</b>	<b>70</b>
21	0,3584	0,3839	69
22	0,3746	0,4040	68
23	0,3907	0,4245	67
24	0,4067	0,4452	66
25	0,4226	0,4663	65
26	0,4384	0,4877	64
27	0,4540	0,5095	63
28	0,4695	0,5317	62
29	0,4848	0,5543	61
<b>30</b>	<b>0,5000</b>	<b>0,5774</b>	<b>60</b>
31	0,5150	0,6009	59
32	0,5299	0,6249	58
33	0,5446	0,6494	57
34	0,5592	0,6745	56
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54
37	0,6018	0,7536	53
38	0,6157	0,7813	52
39	0,6293	0,8098	51
<b>40</b>	<b>0,6428</b>	<b>0,8391</b>	<b>50</b>
41	0,6561	0,8693	49
42	0,6691	0,9004	48
43	0,6820	0,9325	47
44	0,6947	0,9657	46
45	0,7071	1,0000	45

$\alpha$ [°]	$\frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta$ [°]
46	0,7193	1,0355	44
47	0,7314	1,0724	43
48	0,7431	1,1106	42
49	0,7547	1,1504	41
<b>50</b>	<b>0,7660</b>	<b>1,1918</b>	<b>40</b>
51	0,7771	1,2349	39
52	0,7880	1,2799	38
53	0,7986	1,3270	37
54	0,8090	1,3764	36
55	0,8192	1,4281	35
56	0,8290	1,4826	34
57	0,8387	1,5399	33
58	0,8480	1,6003	32
59	0,8572	1,6643	31
<b>60</b>	<b>0,8660</b>	<b>1,7321</b>	<b>30</b>
61	0,8746	1,8040	29
62	0,8829	1,8807	28
63	0,8910	1,9626	27
64	0,8988	2,0503	26
65	0,9063	2,1445	25
66	0,9135	2,2460	24
67	0,9205	2,3559	23
68	0,9272	2,4751	22
69	0,9336	2,6051	21
<b>70</b>	<b>0,9397</b>	<b>2,7475</b>	<b>20</b>
71	0,9455	2,9042	19
72	0,9511	3,0777	18
73	0,9563	3,2709	17
74	0,9613	3,4874	16
75	0,9659	3,7321	15
76	0,9703	4,0108	14
77	0,9744	4,3315	13
78	0,9781	4,7046	12
79	0,9816	5,1446	11
<b>80</b>	<b>0,9848</b>	<b>5,6713</b>	<b>10</b>
81	0,9877	6,3138	9
82	0,9903	7,1154	8
83	0,9925	8,1443	7
84	0,9945	9,5144	6
85	0,9962	11,4301	5
86	0,9976	14,3007	4
87	0,9986	19,0811	3
88	0,9994	28,6363	2
89	0,9998	57,2900	1
<b>90</b>	<b>1,0000</b>	<b>-</b>	<b>0</b>